Autour de sin(x)/x

Partie I

Soit $l \in \mathbb{R}$. On note f l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = l$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$.

1. Quelle valeur faut-il donner à l pour que f soit continue à droite en 0 ?

On suppose désormais que l a cette valeur.

2. Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est à dire : dérivable et à dérivée continue) sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et explicitez la dérivée de f à droite en 0.
3. Soit $n \geq 1$. Montrez que, dans l'intervalle I_n, l'équation $x\cos x = \sin x$ possède une et une seule solution, que l'on notera x_n.
4. Déterminer un équivalent *très simple* de x_n, lorsque n tend vers l'infini.
5. Décrivez rapidement les variations de f sur l'intervalle I_0, puis dans les intervalles I_{2n-1} et I_{2n} pour $n \geq 1$.
6. Déterminez l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II

7. Justifier l'existence de l'application F définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = F((n+1)\pi) - F(n\pi) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)dt$.

8. Quel est le signe de u_n ?
9. Montrez que la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante et converge vers 0.
10. Que pouvez-vous dire des suites de termes généraux respectifs $F(2n\pi)$ et $F((2n+1)\pi)$?
11. Montrez que la suite de terme général $F(n\pi)$ converge vers une limite μ (que l'on ne cherchera pas à déterminer).
12. Justifiez l'encadrement $0 \leq \mu \leq \pi$.
13. Préciser la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, si toutefois cette limite existe.

On peut établir la formule $\mu = \dfrac{\pi}{2}$, mais c'est une autre histoire.

Partie III

Il est clair que la restriction g de f à l'intervalle $]0,+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle ; on pourrait d'ailleurs prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$ mais ce n'est pas notre objectif. On se propose simplement d'établir quelques résultats concernant la dérivée n-ième de g, notée $g^{(n)}$. En particulier, $g^{(0)}$ désigne g elle-même. On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée. Chaque polynôme sera écrit selon les puissances décroissantes de X.

14. Expliciter $g^{//}(x)$ pour $x > 0$.

Au vu des expressions de $g(x), g'(x), g''(x)$, on se propose d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

« Il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que, pour tout $x > 0$:

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin^{(n)} x + Q_n(x)\sin^{(n+1)} x}{x^{n+1}} \text{ »}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n.

15. Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0,1,2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant les expressions de P_n et Q_n pour ces valeurs de n. Voyez-vous apparaître une relation *simple* entre P_n et Q_n ?

16. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on suppose l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Etablissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez des expressions de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.

Il résulte donc des questions 15 et 16 que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17. Montrez que P_n et Q_n ont tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$; préciser le degré, la parité et le coefficient dominant de ces polynômes.

18. Utilisez les formules établies à la question 16 pour expliciter P_3 et Q_3.

19. Deux polynômes U et V vérifient $U(x)\sin x + V(x)\cos x = 0$ pour tout $x > 0$. Montrez que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.

20. En partant de la relation $xg(x) = \sin x$ et en appliquant la formule de Leibniz, ainsi que le résultat de la question précédente, mettez en évidence deux nouvelles relations liant P_n, Q_n, P_{n+1} et Q_{n+1}.

21. Justifiez alors la relation $P_n' = Q_n$ et montrez que P_n est solution d'une équation différentielle du second ordre *très simple*, que l'on notera $\mathcal{E}_n$.

22. Il est clair que l'application $\Phi : T \mapsto T + T''$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ - espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Montrez que Φ induit un automorphisme Φ_n du sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes de degré n au plus ; montrez ensuite que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Il résulte de ceci que P_n est l'unique solution polynomiale de l'équation différentielle $\mathcal{E}_n$.

23. $n \in \mathbb{N}$ est fixé et p désigne la partie entière de $n/2$. Justifiez l'existence d'une famille $(a_k)_{0 \le k \le p}$ de réels vérifiant $P_n = \sum_{0 \le k \le p} a_k X^{n-2k}$ et déterminer une expression de a_k faisant intervenir des factorielles et/ou des puissances, mais débarrassée de tout signe $\prod$.

24. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y = x^n$.